

### Задача 1

**В судне возникла течь, и один из отсеков судна был затоплен. Команда их 10 матросов откачивает воду из отсека за 6 часов, команда матросов из 14 – за 4 часа. За сколько часов откачают воду 18 матросов?**

Решение

Если скорость поступления воды в отсек  $V_1$ , а скорость работы одного матроса  $V_2$ , то  $\frac{1}{10V_2 - V_1}$  \* - время работы команды из десяти матросов, а

$\frac{1}{14V_2 - V_1}$  - время работы команды из 14 матросов. По условию задачи

получаем систему 
$$\begin{cases} \frac{1}{14V_2 - V_1} = 4 \\ \frac{1}{10V_2 - V_1} = 6 \end{cases},$$

Откуда  $V_1 = 1/24$ ,  $V_2 = 1/48$ , а искомое время равно  $\frac{1}{18 \cdot \frac{1}{48} - \frac{1}{24}} = 3$

*\*Объем отсека можно принять за 1, скорость убывания воды в отсеке равна разности скорости работы десяти матросов и скорости поступления воды в отсек.*

**2.Трехзначное число разложили на целые множители. После этого каждый множитель увеличили не более, чем на 10%, так чтобы снова получилось целое число (некоторые множители, возможно, остались без изменения). На какое наибольшее число процентов могло увеличиться произведение?**

Решение

В разложении трехзначного числа на множители не может быть более двух множителей, не меньших 10-ти, а если все множители меньше 10-ти, то нельзя увеличить их, как сказано по условию задачи, так, чтобы они оказались целыми (каждый из них окажется меньше 1), а, следовательно, их произведение не будет целым. Поэтому наибольшим числом процентов будет

увеличение на  $\frac{11}{10} \cdot \frac{11}{10} = \frac{121}{100}$ , т.е. на 21%.

\* Десятая часть от числа может быть целым числом, если данное число делится на 10, поэтому увеличим два множителя, делящихся на 10, на наибольшее возможное число процентов - на 10 процентов, а третий множитель оставим без изменения.

**3. Лиса преследовала кролика по прямолинейной дорожке, ведущей к норке кролика. Их скорости были постоянны. В некоторый момент времени расстояние от кролика до норы было 7 м, а от норки до лисы - 13 м. В некоторый следующий момент расстояние между кроликом и норой стало вдвое меньше расстояния между норкой и лисой. Догонит ли лиса кролика раньше, чем он юркнет в норку?**

Решение

Если расстояние до норки от лисы равно 13, а ее скорость  $x$ , то время её достижения норки равно  $\frac{13}{x}$ , а кролика -  $\frac{7}{y}$ , где  $y$  – скорость кролика.

Если лиса догоняет кролика у норки, то  $\frac{13}{x} = \frac{7}{y} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{13}{7} < 2$ . \*

Если расстояние от лисы до норки  $S$ , а от кролика до норки  $S/2$ , то лиса догоняет кролика тогда и только тогда, когда

$\frac{S}{x} \leq \frac{S}{2y} \Leftrightarrow \frac{x}{y} \geq 2$ . Получили противоречие. Следовательно, лиса не догонит

кролика раньше, чем он юркнет в норку.

\* Если лиса догоняет кролика раньше, чем у норки, то  $\frac{13}{x} > \frac{7}{y} \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{13}{7} < 2$ .

**4. Найдите наибольшее значение выражения  $a^3b - ab^3$ , если выполнено условие  $a^2 + b^2 = 1$**

Решение

$A = \sin x$ ,  $b = \cos x$ , тогда  $a^3b - ab^3 = 1/4 \sin 4x$ . Наибольшее значение равно  $1/4$ .

**5. Число диагоналей  $n$ -угольника 3 раза больше числа его сторон. Сколько сторон имеет многоугольник?(9)**

Решение

Число диагоналей  $n$ -угольника вычисляется по формуле  $n(n-3)/2$  тогда из уравнения  $n(n-3)/2 = 3n$  получаем  $n=9$ .

**6. В остроугольном треугольнике биссектриса угла  $B$  треугольника  $ABC$  проведена прямая, проходящая через середину биссектрисы перпендикулярная ей. Может ли эта прямая пересекать  $AC$ ?**

Решение

Предположим, что прямая пересекает сторону  $AC$ , тогда сумма углов  $C$  и  $B$  треугольника  $ABC$  больше  $180^\circ$ .