1. Автомобиль выехал из пункта A со скоростью $v_1 = 30$ км/ч и прибыл в пункт B со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Определите среднюю путевую скорость автомобиля, если на первой четверти пути он двигался равномерно, а на остальном участке пути – равноускоренно.

Дано:
$v_1 = 30$ км/ч,
$v_2 = 60$ км/ч,
$s_1 = \frac{1}{4}s$,
$s_2 = \frac{3}{4}s$.

$v_{ср}$ – ?

Решение

По определению, средняя скорость автомобиля определяется формулой $v_{ср} = \frac{s}{t}$. На первой четверти пути автомобиль двигался равномерно, следовательно $\frac{s}{4} = v_1 t_1$, откуда $t_1 = \frac{s}{4v_1}$.

На остальной части пути движение автомобиля было равноускоренным:

$$\begin{cases} \frac{3s}{4} = v_1 t_2 + \frac{at_2^2}{2}; \\ v_2 = v_1 + at_2. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2};\ \frac{3s}{4} = \frac{v_1 + v_2}{2} t_2;\ t_2 = \frac{3s}{2(v_1 + v_2)}.$$

Вычислив общее время движения автомобиля $t = t_1 + t_2 = \frac{(7v_1 + v_2) \cdot s}{4v_1(v_1 + v_2)}$, находим значение средней скорости: $v_{ср} = \frac{4v_1(v_1 + v_2)}{7v_1 + v_2} = 40$ км / ч.

№2

Очевидно, в момент удара только крайние кубики соприкасаются с шайбой. Сила, действующая на каждый из этих кубиков, направлена перпендикулярно грани касания шайбы с соответствующим кубиком и проходит через его центр (диаметр шайбы равен ребру кубика!). Поэтому средний кубик в результате этого удара останется неподвижным. Для крайних кубиков и шайбы можно написать закон сохранения импульса по в проекции на направление скорости шайбы υ:

$$m\upsilon = 2mu\cos 45^0 + m\upsilon_1 \tag{1}$$

здесь m — масса каждого кубика и шайбы, υ_1 — скорость шайбы после соударения, u — скорость каждого из крайних кубиков.

Закон сохранения энергии дает уравнение:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = 2\frac{mu^2}{2} + \frac{m\upsilon_1^2}{2} \tag{2}$$

Решая систему уравнений (1), (2) получим:

$$u = \frac{\upsilon\sqrt{2}}{2}, \upsilon_1 = 0$$

Следовательно, после удара скорости крайних кубиков составляют углы 45° со скоростью υ, шайба останавливается, средний кубик так и останется неподвижным.

№3

3 Так как груз со льдом сначала тонут, то действующая на них сразу после опускания в воду сила тяжести больше силы Архимеда:

$$(m+M)g > \rho_в g\left(\frac{m}{\rho_с} + \frac{M}{\rho_л}\right).$$

Отсюда

$$m > \frac{(\rho_в - \rho_л)\rho_с}{(\rho_с - \rho_в)\rho_л}M = \frac{(1-0{,}9)\ г/см^3 \cdot 11\ г/см^3}{(11-1)\ г/см^3 \cdot 0{,}9\ г/см^3} \cdot 1\ кг = \frac{11}{90}\ кг \approx 0{,}122\ кг,$$

то есть минимально возможная масса груза равна $m_{\min} \approx 122$ г.

Через достаточно большое время погруженный в воду лёд нагревается до температуры 0 °C. При этом на него намерзает дополнительная масса льда, равная

$$\Delta M = \frac{C_л M(t_0 - t)}{\lambda}.$$

Так как после окончания процесса намерзания груз и привязанный к нему лёд массой $M + \Delta M$ всплывают, то

$$(m + M + \Delta M)g < \rho_в g\left(\frac{m}{\rho_с} + \frac{M+\Delta M}{\rho_л}\right),$$

откуда

$$m < \frac{(\rho_в - \rho_л)\rho_с}{(\rho_с - \rho_в)\rho_л}(M + \Delta M) = \left(1 + \frac{C_л(t_0 - t)}{\lambda}\right)\frac{(\rho_в - \rho_л)\rho_с}{(\rho_с - \rho_в)\rho_л}M =$$

$$= \left(1 + \frac{C_л(t_0 - t)}{\lambda}\right)m_{\min} = \left(1 + \frac{2{,}1\ Дж/г \cdot 30\ °C}{340\ Дж/г}\right)\cdot\frac{11}{90}\ кг \approx 0{,}145\ кг,$$

то есть максимально возможная масса груза равна $m_{\max} \approx 145$ г.

№4

Шарики удаляются друг от друга под действием силы электрического отталкивания:

$$F = k\frac{q^2}{r^2}$$

Где q —заряд каждого шарика, r — расстояние между шариками.

Эта сила и, следовательно, ускорения шариков меняются по модулю по мере изменения расстояния между шариками. Поэтому движение шариков не будет равноускоренным.

Разобьем перемещения шариков в первом и во втором случаях на одинаковое число участков, таких, чтобы относительные перемещения в обоих случаях были одинаковыми. Обозначим расстояние между шариками в начальный момент через $2x_0$, а в некоторый последующий момент времени — через $2x$. Величина $\delta = x/x_0$ — относительное перемещение шариков.

Пусть δ изменилось на величину $\Delta\delta$. Тогда перемещение каждого шарика в первом случае (когда $2x_0 = l$) равно:

$$\Delta x_1 = \Delta\delta \frac{l}{2}$$

а во втором случае (когда $2x_0 = 3l$):

$$\Delta x_2 = \Delta\delta \frac{3l}{2}$$

Отсюда следует:

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = 3$$

Сравним средние скорости шариков. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии. В начальный момент шарики обладают только потенциальной энергией электрического взаимодействия:

$$Wp_0 = k\frac{q^2}{2x_0}$$

Когда расстояние между шариками станет равным $2x$, их потенциальная энергия примает значение:

$$Wp = k\frac{q^2}{2x}$$

а кинетическая энергия примет значение:

$$W_k = 2\frac{m\upsilon^2}{2}$$

где m — масса шарика. Запишем закон сохранения энергии:

$$k\frac{q^2}{2x_0} = k\frac{q^2}{2x} + 2\frac{m\upsilon^2}{2}$$

Найдем υ:

$$\upsilon = \sqrt{k\frac{q^2(\delta-1)}{2x_0 m\delta}}$$

Таким образом, при одном и том же значении относительного перемещения δ скорость шарика в первом случае больше, чем во втором, в

$$\sqrt{\frac{q^2}{ml}} : \sqrt{\frac{q^2}{3ml}} = \sqrt{3}$$

При изменении на величину $\Delta\delta$ средние скорости шариков будут отличаться тоже в $\sqrt{3}$ раз:

$$\frac{\upsilon_{ср1}}{\upsilon_{ср2}} = \sqrt{3}$$

Промежутки времени, за которые шарики перемещаются па Δx_1 в первом случае и на Δx_2 во втором случае, равны соответственно:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{\upsilon_{ср1}}, \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{\upsilon_{ср2}}$$

Окончательно получим:

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \cdot \frac{\upsilon_{ср1}}{\upsilon_{ср2}} = 3\sqrt{3}$$

5. К источнику тока подсоединён реостат. При токах $I_1 = 0{,}2$ А и $I_2 = 0{,}8$ А на реостате выделяется одинаковая мощность. Определите ток короткого замыкания источника.

Дано:	*Решение*
$I_1 = 0{,}2$ А, $I_2 = 0{,}8$ А, $N_1 = N_2$.	Ток короткого замыкания источника тока определяется формулой $I_{кз} = \dfrac{\mathscr{E}}{r}$, где $\mathscr{E}$ – ЭДС источника тока,
$I_{кз}$ – ?	

r – его внутреннее сопротивление. Для определения этих параметров запишем закон Ома для полной цепи

$$\mathscr{E} = I(R + r) \Rightarrow R = \frac{\mathscr{E}}{I} - r.$$

Мощность, выделяющуюся на реостате, находим по закону Джоуля–Ленца:

$$N = I^2 R = I^2\left(\frac{\mathscr{E}}{I} - r\right) = I\mathscr{E} - I^2 r.$$

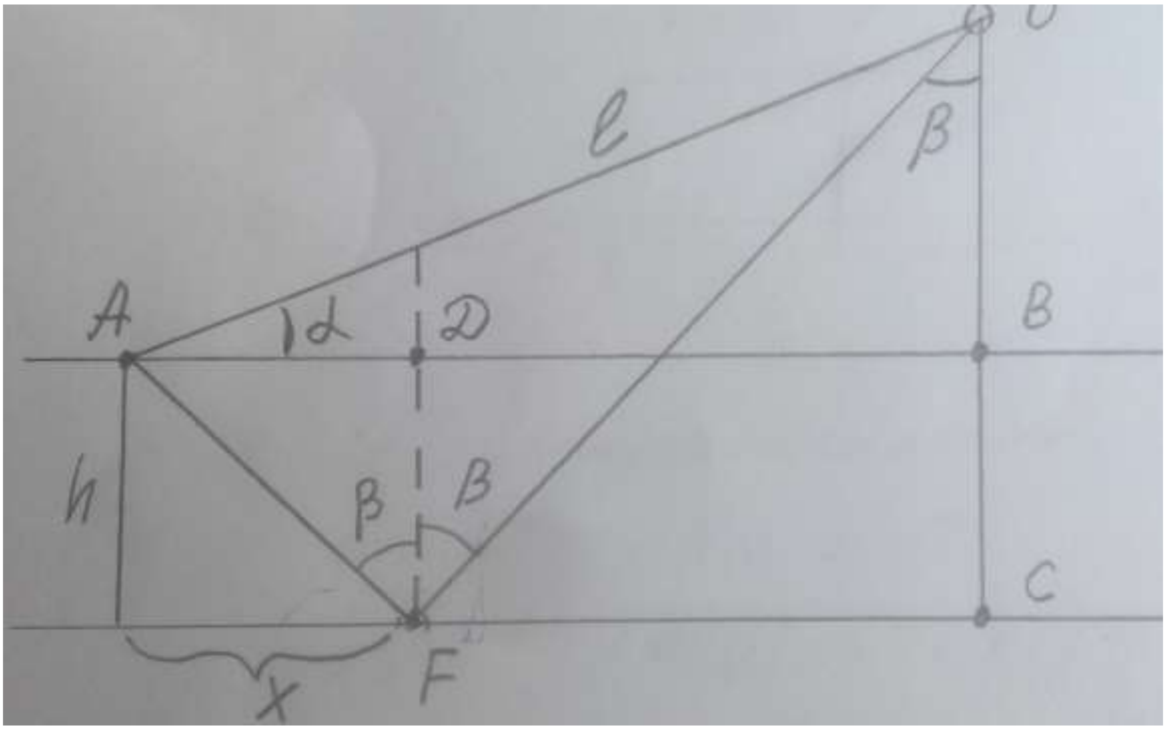
Поскольку, по условию, мощности, выделяющиеся на реостате, при двух значениях силы тока одинаковы, получаем:

$$I_1\mathscr{E} - I_1^2 r = I_2\mathscr{E} - I_2^2 r \Rightarrow \mathscr{E} = \frac{I_2^2 - I_1^2}{I_2 - I_1} r = (I_2 + I_1) r.$$

Следовательно, ток короткого замыкания равен

$$I_{кз} = I_2 + I_1 = 1 \text{ А}.$$

№6



Из рисунка видно: $AO=l$

Из ΔADF:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{AD}{DF} = \frac{x}{h} \qquad (1)$$

Из ΔFOC:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{FC}{OC} = \frac{DB}{OC} = \frac{AB - AD}{OB + BC}$$

$OB=l\cdot\sin\alpha$, $AB=l\cdot\cos\alpha$

Учитывая это получим:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{l\cos\alpha - x}{l\sin\alpha + h} \qquad (2)$$

Приравняем (1) и (2):

$$\frac{x}{h} = \frac{l\cos\alpha - x}{l\sin\alpha + h}$$

Отсюда:

$$x = \frac{hl\cos\alpha}{l\sin\alpha + 2h}$$

Учтем, что $2h \ll l\cdot\sin\alpha$ тогда:

$$x = \frac{hl\cos\alpha}{l\sin\alpha} = h\mathrm{ctg}\alpha = \frac{h}{\sqrt{3}} = 104\text{см}$$